CHAPITRE 15

FAMILLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

I. Couples de variables aléatoires

1. Couples, lois marginales

Définition 15.1

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même univers $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, le couple (X, Y) est la variable aléaoire à valeurs dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{rccl} (X,Y): & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}\big([X = x] \cap [Y = y]\big)$$

Si $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, la **loi du couple** (X, Y) est la donnée de la famille $\big((x_i, y_j), p_{i,j}\big)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ où pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$.

La loi d'un couple de variables aléatoires finies peut être représentée sous forme d'un tableau à double entrée :

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots\cdots$	y_m
x_1	$\mathbb{P}(X = x_1, Y = y_1)$	$\mathbb{P}(X = x_1, Y = y_2)$	$\cdots\cdots$	$\mathbb{P}(X = x_1, Y = y_m)$
x_2	$\mathbb{P}(X = x_2, Y = y_1)$	$\mathbb{P}(X = x_2, Y = y_2)$	$\cdots\cdots$	$\mathbb{P}(X = x_2, Y = y_m)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	$\mathbb{P}(X = x_n, Y = y_1)$	$\mathbb{P}(X = x_n, Y = y_2)$	$\cdots\cdots$	$\mathbb{P}(X = x_n, Y = y_m)$

Dans toute la suite, X et Y désignent deux variables aléatoire réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition 15.2

Les lois de X et de Y sont appelées les **lois marginales** du couple (X, Y).

Propriété 15.1

Les familles $(X = x)_{x\in X(\Omega)}$, $(Y = y)_{y\in Y(\Omega)}$, et $(X = x, Y = y)_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$ sont des systèmes complets d'événements. En particulier on a :

$$\boxed{\sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = 1}$$

et

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x, Y = y)}$$

Remarque

La connaissance de la loi du couple (X, Y) peut donc permettre de retrouver les lois de X et de Y
Le contraire est faux en général : la connaissance des lois marginales de X et Y de suffit pas pour connaître la loi de (X, Y)

Exemple 15.1

Observons les deux lois de couples ci-dessous :

Loi d'un couple (X,Y)

y_j \ x_i	0	1	$\mathbb{P}(Y=y_j)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

Loi d'un couple (X',Y')

y'_j \ x'_i	0	1	$\mathbb{P}(Y'=y'_j)$
0	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{8}$
$\mathbb{P}(X'=x'_i)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

On remarque que X et X' suivent la même loi et que Y et Y' suivent la même loi, **mais (X,Y) n'a pas la même loi que (X',Y').**

→ **Exercice de cours n° 1.**

2. Loi d'une somme

Proposition 15.2 (rappel, admise)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$X+Y : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X(\omega)+Y(\omega) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda X : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \lambda \times X(\omega) \end{array}$$

sont des variables aléatoires discrètes.

Proposition 15.3

Si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i\in Z} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i)$$

En particulier, si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i, Y=k-i)$$

→ **Exercice de cours n° 2.**

II. Covariance

1. Formule de transfert, espérance d'un produit

Propriété 15.4 (Formule de transfert pour un couple de V.A.)

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles et soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. Alors, sous réserve de convergence absolue de la somme, on a $\mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} \varphi(X,Y)\mathbb{P}(X=x, Y=y)$

Autrement dit :

- Si X et Y prennent un nombre fini de valeurs $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et $\{y_1, y_2, \cdots, y_p\}$, on a

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \varphi(x_i, y_j)\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

- Si X et Y prennent un nombre infini de valeurs $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $\{y_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, on a (sous réserve de convergence absolue)

$$\mathbb{E}[\varphi(X,Y)] = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \varphi(x_i, y_j)\mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j)$$

Remarque

En particulier, si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ on a (sous réserve de convergence)

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} ij \cdot \mathbb{P}(X=i, Y=j) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} ij \cdot \mathbb{P}(X=i, Y=j)$$

2. Covariance

Propriété 15.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 2. Alors XY admet une espérance et

$$|\mathbb{E}[XY]| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$

avec égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(Y = \lambda X) = 1$

Propriété 15.6

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors $X + Y$ admet un moment d'ordre 2.

Définition 15.3

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes qui admettent une variance. On définit la **covariance** de X et Y, notée $\mathrm{Cov}(X,Y)$, par

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Propriété 15.7

Pour toutes variables aléatoires réelles discrètes X et Y qui admettent une variance, on a :

- $\mathrm{Cov}(X,X) = V(X)$
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(Y,X)$

Théorème 15.8 (formule de Koenig-Huygens pour la covariance)

Soit X et Y deux variables aléatoires admettant une variance. Alors

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$$

Remarque

Dans le cas où $Y = a$ où a est un réel fixé, (on parle de variable déterministe), on a $\mathrm{Cov}(X,a) = 0$. En effet, $\mathbb{E}[a] = a$ donc $\mathbb{E}[aX] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[a] = a\mathbb{E}[X] - a\mathbb{E}[X] = 0$.

→ **Exercice de cours n°3.**

Propriété 15.9 (bilinéarité)

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires admettant une variance. Alors

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Cov}(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda\mathrm{Cov}(X,Z) + \mu\mathrm{Cov}(Y,Z)$$

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Cov}(X, \lambda Y + \mu Z) = \lambda\mathrm{Cov}(X,Y) + \mu\mathrm{Cov}(X,Z)$$

On dit que la covariance est **bilinéaire**.

→ **Exercice de cours n°4.**

Définition 15.4

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant une variance. On définit le **coefficient de corrélation** de X et Y, noté $\rho(X,Y)$, par

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Remarque

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux variables $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$ donne l'inégalité suivante :

$$|\text{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$$

On en déduit donc que $\boxed{|\rho(X,Y)| \leq 1}$, le coefficient de corrélation est donc compris entre -1 et 1.

Propriété 15.10 (Invariance d'échelle)

Soient X et Y deux variables aléatoire discrètes admettant une variance, et soient a, b, c, d quatre réels avec $a > 0$ et $c > 0$. Alors

$$\rho(aX + b, cY + d) = \rho(X,Y)$$

Proposition 15.11

Une corrélation égale à 1 ou à -1 signifie que les variables X et Y sont reliées entre elles par une fonction affine (presque sûrement) :

- $\rho(X,Y) = 1 \iff \exists (a,b) \in]0;+\infty[\times\mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$
- $\rho(X,Y) = -1 \iff \exists (a,b) \in]-\infty;0[\times\mathbb{R},\ \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$

Exemple 15.2

Si on lance n fois une pièce équilibrée et qu'on note X le nombre de Piles et Y le nombre de Faces obtenus, alors $Y = n - X$ donc $\rho(X,Y) = -1$.

3. Variance

Propriété 15.12

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles discrètes qui admettent une variance, alors

$$\boxed{V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X,Y)}$$

De façon générale, si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ admettent une variance,

$$\boxed{V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)}$$

→ **Exercice de cours n^o 5.**

III. Indépendance de variables aléatoires

Rappel

Deux événements A et B sont dit indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Dans toute cette partie, $X_1, X_2, \ldots X_n$ désignent des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Définition et premières propriétés

Définition 15.5

Deux variables aléatoires X et Y sont dits **indépendantes** si pour tout intervalles réels A et B,

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(X \in B)$$

Définition 15.6

Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes** si pour tout intervalles $A_1, \ldots, A_n$ de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\big((X_1 \in A_1) \cap \cdots \cap (X_n \in A_n)\big) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n \in A_n)$$

Plus généralement, une suite $(X_n)_{n \geq 0}$ de variables aléatoires est une **suite de variables indépendantes** si les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

En particulier, si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Exemple 15.3

On lance un dé équilibré à 6 faces n fois de suite de façon indépendante et pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on note X_k le numéro obtenu au k-ième lancer. On admet que les variables $X_1, X_2, ..., X_n$ sont indépendantes.
Pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1,2,3,4,5,6\}$, on a alors

$$\mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \mathbb{P}(X_2 = x_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \cdots \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6^n}$$

Exemple 15.4

On mélange n jetons numérotés de 1 à n dans un sac, et on tire successivement et sans remise tous les jetons du sac. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ on note X_k le numéro du k-ième jeton tiré. Alors les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ne **sont pas** indépendantes.
En effet, $\mathbb{P}(X_1 = 1) \neq 0$ et $\mathbb{P}(X_2 = 1) \neq 0$, mais $\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = 0$ ce qui prouve que :

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) \neq \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 2)$$

→ **Exercice de cours n°6.**

Propriété 15.13

Si B_1 et B_2 sont deux variables de Bernoulli, elles sont indépendantes si et seulement si les événements $(B_1 = 1)$ et $(B_2 = 1)$ sont indépendants.

La propriété précédente se généralise à la forme suivante pour n'importe quelle famille $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires discrètes.

Propriété 15.14

Les variables aléatoires réelles discrètes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si pour tout $x_1 \in X_1(\Omega)$, $x_2 \in X_2(\Omega), \ldots, x_n \in X_n(\Omega)$ on a

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \mathbb{P}(X_2 = x_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(X_n = x_n)$$

Proposition 15.15 (lemme des coalitions) (admis)

Si $X_1, X_2, \ldots X_k, Y_1, Y_2, \ldots, Y_\ell$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et que f et g sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $f(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ et $g(Y_1, Y_2, \ldots Y_\ell)$ sont indépendantes.

Exemple 15.5

Si X, Y et Z sont trois variables aléatoires indépendantes, alors $\cos(X+Y)$ et e^Z sont indépendantes

Exemple 15.6

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuelements indépendantes et si $Y = \sum_{k=1}^{p} X_k$ et $Z = \sum_{k=p+1}^{n} X_k$, alors Y et Z sont indépendantes.

2. Espérance, variance, covariance

Propriété 15.16

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui admettent une espérance, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et admettant une espérance, alors

$$\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(X_2) \cdot \cdots \cdot \mathbb{E}(X_n)$$

→ **Exercice de cours n°7.**

Propriété 15.17

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui admettent une variance, alors $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Remarque

$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ est une condition nécessaire pour que X et Y soient indépendantes, mais ce n'est pas une condition suffisante.

On dit que X et Y sont non corellées si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ (et corellées si $\mathrm{Cov}(X, Y) \neq 0$). Si elles sont indépendantes alors elles sont non corellées. Par contraposée, si elles sont corellées alors elles ne sont pas indépendantes. Les réciproques sont fausses en général.

Exemple 15.7

Si X suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = X^2$, alors X et Y ne sont pas indépendantes (considérer par exemple les événements $(X = 0)$ et $(Y = 1)$), mais pourtant $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=0}^{1} i \cdot j \cdot \mathbb{P}(X = i, Y = j) - 0 \times \mathbb{E}(Y) \\
&= -\mathbb{P}(X = -1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Propriété 15.18

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est une famille de variables aléatoires indépendantes qui admettent une variance, alors

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

3. Applications

a. Sommes de variables indépendantes

Proposition 15.19

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p, alors $S = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi binomiale de paramètres n, p.

Remarque

L'espérance d'une loi binomiale s'obtient alors simplement avec $\mathbb{E}(S) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np$ par linéarité de l'espérance.

Proposition 15.20 (admise)

Réciproquement, si $S \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$, alors il existe des variables aléatoires indépendantes $X_1,\dots,X_n$ qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p telles que $S = X_1 + \cdots + X_n$

Proposition 15.21

Soient $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \in]0;1[$. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$, alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)$.

Proposition 15.22

Soient λ et μ deux réels strictement positifs. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

b. Loi des grands nombres

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes, indépendantes et de même loi. Supposons que X_1 admet une espérance $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et une variance $\sigma^2 = V(X_1)$ (alors tous les autres X_n ont même variance et même espérance).

On note $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$. On remarque qu'alors on a, par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[\overline{X_n}] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu = \mu$$

On a aussi $V(\overline{X_n}) = \dfrac{1}{n^2}V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k\right) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}V(X_k)$ par indépendance de la famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, donc

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

La variable $\overline{X_n}$ admet une variance comme somme de variables qui admettent une variance, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à $\overline{X_n}$ on obtient, pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}[\overline{X_n}]\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(\overline{X_n})}{\varepsilon^2}$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 15.23 (loi faible des grands nombres, HP)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (réelles discrètes) indépendantes et de même loi, admettant une espérance μ et une variance, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

On peut interpréter ce théorème de la façon suivante : pour une valeur $\varepsilon > 0$ fixée, si on répète de façon indépendante une expérience aléatoire un grand nombre de fois, la probabilité que la moyenne des résultats obtenus s'éloigne de l'espérance de plus de ε tend vers 0 lorsque le nombre d'expérience tend vers $+\infty$. Plus le nombre d'expérience augmente, plus la moyenne empirique s'approche de la moyenne théorique de façon certaine.

Exercices de cours

Exercice 1

On considère n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on pioche une boule au hasard dans cette urne. On note X le numéro de l'urne tirée et Y le numéro de la boule choisie.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. Déterminer la loi du couple (X, Y).
3. En déduire la loi suivie par Y.

Exercice 2

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) qui suit la loi uniforme sur $\{1, 2, ..., n\}^2$, c'est à dire que pour tout $(i, j) \in \{1, 2, ..., n\}^2$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{n^2}$.

1. Déterminer la loi marginale de X et la loi marginale de Y
2. Déterminer la loi de $X + Y$

Exercice 3

Soit $n \geq 2$. On tire deux jetons successivement et sans remise d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On note N_1 le numéro de la première boule tirée et N_2 le numéro de la deuxième boule tirée.

1. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $\mathbb{P}(N_1 = i, N_2 = j)$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(N_1 N_2) = \dfrac{(n+1)(3n+2)}{12}$.
3. En déduire $\text{Cov}(N_1, N_2)$.

Exercice 4

On lance n fois une pièce truquée qui tombe sur Pile avec probabilité $p \in]0; 1[$. On note X le nombre de Piles et Y le nombre de Faces obtenus. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 5

Chaque jour, N personnes se rendent dans un restaurant qui propose 2 menus, appelés « menu A » et « menu B ». Chaque personne choisit au hasard l'un des deux menus, et on note X le nombre de personnes ayant choisi le menu A et Y le nombre de personnes ayant choisi le menu B. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer $\mathbb{P}_{(N=n)}(X = k)$ pour tout entier naturel k.
2. Déterminer la loi de (N, X) puis en déduire la loi de X et la loi de Y.
3. Exprimer $V(X + Y)$ en fonction de λ.
4. En déduire finalement que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Exercice 6

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a < b$ et soit (U_n) une suite de variables aléatoire indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[\![a, b]\!]$. On pose $M_n = \max(U_1, \dots, U_n)$. Déterminer la loi de M_n.

Exercice 7

Soient B et H deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. On considère un rectangle dont la base est de longueur B et la hauteur est H.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un rectangle d'aire égale à 2 ?
2. Quelle est l'espérance de l'aire du rectangle obtenu ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré ?